Untersuchungen

über

erzwungene Membranschwingungen.

Habilitationsschrift

welche

mit Genehmigung der philosophischen Fakultät zu Marburg

am 1. Juli 1882

öffentlich vertheidigt werden wird

von

Dr. **Adolf Elsas.**

MARBURG.
1882.
Druck von E. Blochmann & Sohn in Dresden.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0092

1. Gegenstand der Untersuchung.

Der berühmte Félix Savart veröffentlichte im Jahre 1826 unter dem Titel „Note sur les Modes de division des corps en vibration“[1]) die Resultate einer experimentellen Untersuchung der Schwingungsarten, deren eine gespannte Membran fähig ist. Die allgemeinen Gesichtspunkte, welche Savart zu dieser Untersuchung veranlassten, und die allgemeinen Gesetze, welche er durch dieselbe zu bestätigen hoffte, werden in dem ersten Satze der Abhandlung folgendermassen angedeutet:

„C'est un fait que j'ai établi par une foule d'expériences, que quand „deux ou plusieurs corps sont en contact, et qu'ils sont ébranlés l'un par „l'autre, ils s'arrangent toujours pour exécuter le même nombre de vibra„tions; d'où il semble qu'on doive tirer cette conséquence, qu'il n'est pas „vrai que les corps ne soient susceptibles que d'une certaine série déter„minée des modes de division, entre lesquelles il n'y a pas d'intermédiaire, „et qu'au contraire ils en peuvent produire qui se transforment graduelle„ment les uns dans les autres; ce qui fait qu'ils sont aptes à exécuter des „nombres quelconques de vibrations.“

Um die Richtigkeit dieser Gedanken zu prüfen, versuchte Savart, Membrane durch tönende Körper, deren Ton nicht mit einem Eigenton der Membran übereinstimmte, in Schwingung zu versetzen. Die Versuche wurden mit dem erwarteten Erfolge gekrönt, und Savart konnte seiner Abhandlung eine grosse Anzahl wohlgeordneter Schwingungsfiguren, von welchen jede einer

[1]) Annales de Chimie et de Physique 2e série, tome XXXII, p. 384.

bestimmten Schwingungszahl entspricht, als Belege zu den im oben citirten Satze angedeuteten Gesetzen beifügen.

Diese Gesetze, auf Membrane eingeschränkt, lassen sich folgendermassen kurz formuliren:

1. Eine gespannte Membran kann mit jedem Tone unisono schwingen.
2. Jedem Tone entspricht eine besondere Schwingungsform der Membran (bei höheren Tönen eine besondere Gestalt und Gruppirung der Knotenlinien), welche durch sein Verhältniss zu dem Grundton der Membran und durch die Form der Begrenzung der letzteren bestimmt ist.
3. Zwischen zwei Systemen von Knotenlinien, welche verschiedenen Tonhöhen entsprechen, ist ein continuirlicher Uebergang vorhanden.

Viele Jahre später, 1860, glaubten die Herren J. Bourget und Félix Bernard durch die mathematische Theorie der Membranschwingungen und durch eine eingehende und sorgsame Experimental-Untersuchung Savart's Behauptungen als unrichtig dargethan zu haben.[1])

Nach den Resultaten ihrer Versuche müssten wir in Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment die Gesetze aufstellen:

1. Eine gespannte Membran kann mit keinem Tone unisono schwingen. Sie kann nur sich selbst in Einklang stellen mit Klängen, die höher als derjenige sind, welcher beim leisen Antippen der Membran gehört wird.
2. Knotenlinien werden nur für gewisse bestimmte Klänge genau ausgebildet. Eine kleine Aenderung in der Höhe des Klanges, durch welchen die Membran in Schwingung versetzt wird, bringt schon Verwirrung hervor; wird die Tonhöhe des erregenden Klanges entschieden geändert, so bleibt die Membran unbewegt.
3. Der Uebergang von einem System von Knotenlinien zu einem anderen ist ein plötzlicher, unvermittelter.

---

[1]) Sur les vibrations des membranes carrées; Ann. de Chimie et de Phys. 3e série, tome LX. J. Bourget, Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires; Ann. de l'école normale, t. III.

Die Resultate Savart's werden also nicht etwa modificirt oder in einzelnen Punkten richtig gestellt, sondern durch andere, welche das gerade Gegentheil sind, beseitigt und vernichtet. Es sieht fast wie ein Angriff auf Savart's wissenschaftliche Ehre aus, wenn Bourget und Bernard in den unzweideutigsten Ausdrücken sagen, Savart sei mit vorgefassten Meinungen an die Untersuchung herangetreten und habe Gesetze gefunden, welche er zur Stütze seiner Theorie des Hörens finden wollte; er habe nicht darauf geachtet, ob seine Membrane homogen und regelmässig gespannt waren, da sorgfältig behandelte Membrane die bizarren Klangfiguren Savart's nicht zeigten.

Es ist unsere Absicht, nachzuweisen, dass die Savart'schen Gesetze zu vollem Recht bestehen, und dass die mathematische Theorie der Membranschwingungen, wie sie in jedem ausführlichen Lehrbuch der theoretischen Akustik entwickelt wird, mit Unrecht den Anspruch erhebt, vollständig zu sein und alle Fälle möglicher Schwingungen zu umfassen.

Wir werden sehen, dass die Gesetze Savart's sich auf erzwungene Schwingungen beziehen, während die bisherige mathematische Theorie und die bisher durchgeführten experimentellen Untersuchungen (natürlich mit Ausnahme der Savart'schen) nur die freien (Eigen-) Schwingungen der Membranen und die Erscheinungen beim Mittönen umfassen.

2. Unterscheidung zwischen erzwungenen und freien Tonschwingungen. Einrichtung, um Membrane in erzwungene Schwingung zu versetzen.

Da nach unserer Meinung der Irrthum Bourget's und Bernard's lediglich darin beruht, dass diese Physiker die Unterscheidung zwischen erzwungenen und freien Schwingungen nicht gekannt oder nicht gewürdigt haben, wollen wir zuerst diese Unterscheidung näher erörtern.

Wird eine Saite gezupft, eine Stimmgabel angeschlagen, eine Membran durch einen continuirlichen Luftstrom angeblasen, so wird dadurch den elastischen Kräften, welche zwischen den Theilchen dieser Körper wirken, Gelegenheit gegeben, in's Spiel zu treten und Tonschwingungen zu verursachen.

Die Analyse der Klänge, welche ein solchergestalt zum Tönen gebrachter Körper liefert, zeigt, dass dieselben in jedem Falle aus Einzeltönen zusammengesetzt sind, deren Schwingungszahlen einzig und allein durch die Art, die Dimensionen und die Beschaffenheit des tönenden Körpers bestimmt, hingegen von der Art der Klangerregung unabhängig sind. Die Gesammtheit dieser Einzeltöne bildet die Reihe der möglichen Componenten, aus welchen ein in der oben bezeichneten Weise erzeugter Klang des Körpers zusammengesetzt sein kann. Jeder Klang eines gegebenen Körpers, welche durch eine (momentane oder continuirliche) nicht periodische äussere Einwirkung hervorgebracht wird, ist entweder ein einfacher Eigenton des Körpers oder ein aus einer Anzahl solcher Eigentöne (aus Componenten der freien Schwingungen) zusammengesetzter Klang. Die Art der Erregung bestimmt nur, wie und aus welchen Componenten der Klang zusammengesetzt ist.

Die theoretische Akustik ist im Stande, für besondere einfache Körper (z. B. Saiten, Membrane, Pfeifen) die ganze Reihe der möglichen Eigenschwingungen aus allgemeinen Betrachtungen zu bestimmen, und in vielen Lehrbüchern dieses Theiles der mathematischen Physik wird die Ansicht vertreten, die Theorie verlange, dass jeder auf beliebige Weise erzeugte Klang eines gegebenen Körpers sich aus den Eigentönen desselben zusammensetzen lässt.

Diese Ansicht findet eine starke Stütze in den Erscheinungen des Mittönens und der Resonanz, bei welchen eine Klangerregung durch eine periodische äussere Einwirkung stattfindet.

Eine Componente der freien Schwingungen eines Körpers erklingt gesondert, wenn man in der Nähe desselben einen anderen Körper, unter dessen Eigenschwingungen sich eine Componente von nahezu derselben Tonhöhe befindet, zum Tönen bringt.

Wenn wir nun unter erzwungenen Schwingungen solche verstehen wollen, welche durch eine periodische äussere Kraft veranlasst werden, so haben wir in den Erscheinungen des Mittönens und der Resonanz Beispiele erzwungener Schwingungen. Es ist eine nothwendige Bedingung für das wahrnehmbare Eintreten des Mitschwingens, dass der erregende Klang Com-

ponenten enthält, welche nahezu mit Eigentönen des resonirenden Körpers übereinstimmen.

Mit dem Namen erzwungene Schwingungen bezeichnen wir aber in strengerem Sinne solche, welche durch eine periodische äussere Kraft von beliebiger Periode in wahrnehmbarer Weise veranlasst werden. Es mag fraglich erscheinen, ob ein beliebiger elastischer Körper fähig ist, mit einem Tone von bestimmter Höhe unisono zu schwingen, das heisst, es mag nicht ohne Weiteres einzusehen sein, dass jeder Körper durch einen mit ihm verbundenen Tongeber dergestalt in Schwingung versetzt werden kann, dass seine Vibrationsgeschwindigkeit genau dieselbe ist, wie diejenige des tongebenden Körpers. Indessen wird zugegeben werden müssen, dass alle Erscheinungen der Fortpflanzung eines Schalles durch luftförmige, flüssige und feste Körper Beispiele solcher erzwungenen Schwingungen bieten. Damit ist constatirt, dass jeder elastische Körper fähig ist, an Schwingungen mit beliebiger Periode Theil zu nehmen, und wenn die Erregung in geeigneter Weise und mit genügender Stärke erfolgt und fortdauert, so dürfen wir zweifellos folgern, dass er auch in stehende Schwingungen mit der gegebenen Periode der äusseren Einwirkung versetzt werden kann.

Die äussere periodische Einwirkung, durch welche eine erzwungene Schwingung hervorgebracht wird, braucht nicht von einem in vibrirender Bewegung befindlichen materiellen Systeme auszugehen; sie kann auch in einer regelmässigen Folge von Impulsen bestehen. „Ein ausgezeichnetes Beispiel einer erzwungenen Schwingung liefert eine Stimmgabel, welche unter dem Einflusse eines intermittirenden elektrischen Stromes schwingt, dessen Periode nahezu gleich ihrer eigenen ist.“ [1])

Weitere gute Beispiele erzwungener Schwingungen liefern das Bell'sche Telephon und eine Einrichtung, welche als Spielzeug vielfach hervorgeholt wurde, als die Erfindung Graham Bell's neu war. Bei zwei kleinen beiderseits offenen Metall- oder Holzcylindern werde die eine Oeffnung durch eine thierische oder eine Kautschuck-Membran geschlossen. Solche Cylinder können

---

[1]) J. W. Strutt, Baron Rayleigh, Die Theorie des Schalles, übersetzt von Neesen, I, p. 78.

zu einem Fernsprechapparat verbunden werden, welcher auf grössere Strecken wirkt, als man gewöhnlich anzunehmen geneigt ist, indem man die Membrane durch eine schwach gespannte Schnur miteinander verbindet. Die Schwingungen der einen Membran, welche durch das gesprochene Wort an der ersten Station erregt werden, pflanzen sich durch die Kordel zur zweiten Membran fort; diese wird in erzwungene Schwingungen versetzt, welche den Schwingungen der ersten Membran genau entsprechen und Luftschwingungen veranlassen, die als Worte gehört werden.

Was nun die theoretische Behandlung der im strengen Sinne erzwungenen Schwingungen anbetrifft, so genügt es nicht, dass eine periodische Kraft gegeben sei, welche auf das gegebene materielle System einwirkt. Die Kraft muss in solcher Weise auf das System einwirken, dass ein Punkt oder ein Theil desselben wirklich mit der gegebenen Periode der Kraft schwingt.

Daher muss die erzwungene Vibrationsgeschwindigkeit eines Punktes oder eines Theiles des materiellen Systems gegeben sein und aus diesem Datum allein ist die Schwingungsform des ganzen Systems zu bestimmen.

Obgleich erzwungene Schwingungen mit beliebiger Periode bei jedem elastischen Körper als möglich gedacht werden müssen, so bleibt es doch fraglich, ob wir einen gegebenen Körper in einer für die Untersuchung geeigneten Weise in solche Schwingungen versetzen können. Dass eine Tischplatte, welche an den Schwingungen einer darauf stehenden Stimmgabel Theil nimmt, kein geeignetes Untersuchungsobject ist, braucht wohl nicht erörtert zu werden.

Die einfachsten Verhältnisse bieten die erzwungenen Schwingungen von Saiten, welche sowohl der Beobachtung, als der Theorie leicht zugänglich sind, wie ich in meiner Promotionsschrift[1]) im Zusammenhange gezeigt zu haben glaube. In dieser Schrift habe ich auch bereits die Art angedeutet, wie man gespannte Membrane leicht in erzwungene Schwingung versetzen kann.[2]) Man verbinde eine Stimmgabel mit einer Membran durch einen weichen Faden, indem man das eine Ende des Fadens mit einem Tropfen Harzkitt auf der

---

[1]) Ueber erzwungene Schwingungen weicher Fäden; Elberfeld bei Joh. Fassbender.

[2]) Seite 34.

Endfläche einer Stimmgabelzinke, das andere Ende, welches man mittelst einer Nähnadel durch die Mitte der Membran hindurchgeführt hat, in derselben Weise an der Membran befestigt. Dann klemme man den Rahmen der Membran an der Kante eines niedrigen Tischchens fest, so dass die Membran horizontal liegt und befestige die Stimmgabel an einem höheren verstellbaren Stativ, so dass die Ebene, welche senkrecht durch beide Zinken der Gabel geführt wird, auf der Membran senkrecht steht. Zuletzt schiebe man das Gestell mit der Stimmgabel so weit in die Höhe, dass der Faden ein wenig gespannt ist. Bringt man nun die Stimmgabel durch Streichen mit einem Violinbogen zum Tönen, so übertragen sich die Schwingungen derselben auf den Faden und von letzterem auf die Membran und das ganze System der drei Körper, Stimmgabel, Faden und Membran, schwingt mit der Vibrationsgeschwindigkeit der Stimmgabel.

Die Schwingungsart der Membran lässt sich dadurch untersuchen, dass man Flusssandkörner möglichst gleichförmig auf der Membran vertheilt und durch ein leinenes Tuch etwas Lycopodiumpulver über sie hinstäubt. Der schwere Sand legt sich an die Stellen minimaler Schwingungsweite und bildet Knotenlinien, während der leichte Staub sich an den Stellen maximaler Schwingungsweite aufhäuft.

3. Bemerkungen über die Geschichte der einschlägigen Untersuchungen.

Es ist Baron Rayleigh's Verdienst, auf die Unterscheidung zwischen freien und erzwungenen Schwingungen mit Schärfe hingewiesen und dieselbe für die theoretische Akustik in fruchtbringender Weise verwerthet zu haben. Seine „Theorie des Schalles" enthält eine Reihe von treffenden Bemerkungen über die Bedeutung dieser Unterscheidung für die theoretische Auffassung akustischer Probleme. Indessen hat man es nicht mit einer durchaus neuen Begriffsbildung zu thun.

Die Brüder Weber hatten in ihrer berühmten „Wellenlehre" und in anderen Schriften[1]) zwischen den Schwingungen forttönender Körper und Re-

[1]) E. H. und W. Weber, Wellenlehre auf Experimente gegründet. Leipzig 1825. S. 539 ff. W. Weber in S. Schweigger's und Schweigger-Seidel's Jahrbuch, Bd. 15 (45), S. 294.

sonanzschwingungen unterschieden, ausgehend von den damals bekannten Verschiedenheiten zwischen den Schwingungsformen selbsttönender und resonirender Körper. Ihre Auffassung ist von vielen späteren Physikern adoptirt und auch von Bindseil[1]) in seiner „Akustik" vertreten worden.

„Beim Selbsttönen tönt der ganze Körper. Die Zwischenräume „zwischen den Knotenlinien der Klangfiguren sind aliquote Theile des „Raumes von einem Rande des tönenden Körpers zum andern. Diese „Linien müssen in dem Sinne immer symmetrisch liegen, als sie Abtheilungen von einer solchen Grösse begrenzen, dass diese Abtheilungen ihre „Schwingungen in gleichen Zeiten vollenden müssen. Hiervon unterscheidet „sich das Mittönen und seine Knotenlinien dadurch, dass beim Mittönen „möglich ist, dass nur ein Theil des Körpers mitklinge, ohne dass der „andere es überhaupt oder in gleichem Grade thut und dass bei den Knotenlinien des Mittönens jenes Verhältniss der Zwischenräume der Knotenlinien des Selbsttönens nicht stattfindet, sowie auch dass die aus jenen „Knotenlinien gebildeten Resonanzfiguren zwar symmetrisch sein können „(wenn der resonirende Körper sehr regelmässig ist), aber es nicht nothwendig zu sein brauchen." [2])

Die Weber'sche Unterscheidung muss verlassen werden, wenn sich zeigen lässt, dass der Schwingungsvorgang beim Selbsttönen und beim Mittönen der Körper derselbe ist und dass die Schwingungsformen niemals specifisch verschieden sind. Savart zeigt in seinen eleganten akustischen Untersuchungen deutlich das Bestreben, diesen Nachweis zu führen;[3]) in der oben citirten Abhandlung,[4]) welche ein Jahr nach der Weber'schen Wellenlehre veröffentlicht wurde, formulirt er mit unzweideutiger Klarheit die Resultate seiner ausgedehnten Experimente, und diese Resultate, deren Richtigkeit an-

---

[1]) H. E. Bindseil, Akustik. Potsdam 1839. p. 263.

[2]) Bindseil a. a. O. S. 264.

[3]) Zuerst in dem Mémoire sur les Vibrations des corps solides, considérées en général; Annales de Chimie et de Phys., tome XXV.

[4]) Note sur les Modes etc.; Ann. de Ch. et de Phys., tome XXXII.

gezweifelt worden ist, hoffen wir durch die vorliegende Abhandlung zu bestätigen und ausser Zweifel zu setzen.

Wenn die Schwingungsformen continuirlich und ohne specifische Verschiedenheiten in einander übergehen, so darf man die Schwingungen selbst nur nach der Art ihres Ursprunges unterscheiden. Eine solche Unterscheidung ist mit grosser Schärfe der Auffassung schon 1824 von F. G. Fischer gegeben worden.[1]) Fischer's Eintheilung in ursprüngliche und mitgetheilte Schwingungen deckt sich dem Wesen der Sache nach mit der von uns adoptirten in freie und erzwungene Schwingungen. Erstere hätte recht wohl beibehalten werden können, indessen verstehen wir unter erzwungenen Schwingungen nicht allein die von einem tönenden Körper mitgetheilten, sondern allgemeiner solche Schwingungen, welche durch irgend eine periodische Einwirkung hervorgerufen werden und deren Oscillationsgeschwindigkeit mit der Periode der Einwirkung übereinstimmt.

Die ersten theoretischen und experimentellen Untersuchungen der Membranschwingungen gehören derselben Zeit an, in welcher durch die Arbeiten der Brüder Weber und Fischer's die Grundlehren der Akustik systematisch zusammengefasst wurden. Savart und Marx[2]) erforschten die Schwingungserscheinungen experimentell. Poisson[3]) lieferte 1829 die vollständige Theorie der freien Schwingungen rechteckiger Membrane, während seine Behandlungsweise der kreisförmigen Membran nicht zu einer vollständigen Lösung des Problems gelangte. Nachdem Kirchhoff[4]) 1850 das weit schwierigere Problem der Schwingungen starrer Platten theoretisch gelöst hatte, war das Material zur vollständigen Behandlung der kreisförmigen Membrane gegeben. Clebsch's „Theorie der Elasticität" (1862) enthält die allgemeine Theorie der kreisförmigen Membran mit Einschluss der Wirkung der Steifheit und

[1]) F. G. Fischer, Ueber die Grundlehren der Akustik. Abh. der Berl. Akad. d. W. 1824; Physik. Klasse, S. 85 ff.

Vgl. Bindseil, Akustik, S. X ff.

[2]) S. Schweigger-Seidel's Neues Jahrb. Bd. 5 (65), Bd. 6 (66).

[3]) Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques; Mém. de l'Acad. VIII. 357 ff.

[4]) Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe; Crelle's Journ. XL, S. 51.

Rotationsträgheit. Die theoretische Untersuchung Bourget's enthält nichts wesentlich Neues, doch ist sein Mémoire durch die experimentellen Resultate und durch die Bekämpfung der Savart'schen Anschauungen äusserst wichtig. Die von Bourget in Gemeinschaft mit Bernard geführte Untersuchung über die Schwingungen quadratischer Membrane ist die erste beachtungswerthe experimentelle Behandlung des Problems seit Marx.

4. Methode der Untersuchung.

Die oben beschriebene Einrichtung, Membrane in obligatorische Schwingungen zu versetzen, gestattet, die Schwingungsformen derselben in der einfachsten Weise nach allen Richtungen zu prüfen. Denn man kann eine sehr grosse Anzahl von Schwingungsformen erhalten, indem man zuerst die Schwingungen verschiedener Stimmgabeln auf die Membran überträgt, dann Membrane von verschiedenem Material oder Membrane von demselben Material unter schwächerer und stärkerer Spannung auf den Rahmen aufspannt und schliesslich auch noch den Rahmen durch andere von derselben Gestalt, aber von anderer Grösse ersetzt.

Bestimmt man für jede Schwingungsform den tiefsten Eigenton der Membran und vergleicht dessen Tonhöhe mit der Höhe der angewandten Stimmgabel, so wird man leicht die Richtigkeit der Savart'schen Gesetze prüfen können.

Ich möchte glauben, dass Savart ein ähnliches Verfahren eingeschlagen hat, um seine Schwingungsfiguren zu erhalten, obwohl er sich hierüber nicht in unzweideutiger Weise äussert. In dem oben angeführten Satze spricht Savart von Körpern, qui sont en contact. Weiterhin sagt er, dass man, um den continuirlichen Uebergang von einer Schwingungsform in eine andere beobachten zu können, entweder den Ton des erregenden Körpers allmählich variiren oder die Membran allmählichen Aenderungen unterwerfen müsse: „l'on peut satisfaire à la seconde (condition) en formant la membrane d'une „substance très-hygrométrique, comme le papier, afin de pouvoir l'imbiber peu „à peu des vapeurs aqueuses, tandis qu'on l'ébranle à distance avec une „lame vibrante, un timbre d'horloge ou tout autre corps, dont le son soit fixe."

Man darf keinen Anstoss daran nehmen, dass die von Savart und die von mir erhaltenen Figuren oft nicht übereinstimmen, da dieselben von der Lage des Erregungspunktes auf der Membran abhängen.

Unter den Apparaten des Berliner physikalischen Instituts, welche Herr Geheimrath Helmholtz mir in freundlichster Bereitwilligkeit zu benutzen gestattete, fand ich eine Reihe von 13 kleinen Stimmgabeln, deren Tonhöhe zwischen c_1 und c_2 lag, und vier grosse auf Resonanzkästen befestigte König'sche Stimmgabeln c_1, e_1, g_1, c_2 zu meinen Versuchen besonders geeignet. Bei sämmtlichen Stimmgabeln waren die ersten Obertöne leicht durch Anstreichen mit einem Violinbogen zu erhalten, und bei den kleinen Gabeln konnte ich ausserdem noch leicht einen dritten Ton herausbringen, indem ich den Violinbogen über eine der Zinken, senkrecht zu der Schwingungsebene des regulären Tones der Stimmgabel, hinführte. Die Höhe dieser Töne, sowie die Höhe der Obertöne bestimmte ich mit Hülfe eines Stimmgabelapparates, welchen Appun construirt hat, um die obere Grenze der Wahrnehmungsfähigkeit von Tonunterschieden zu demonstriren. — Ich konnte also im Ganzen mehr als 40 verschiedene Töne zur Erregung der Membranschwingungen benutzen. Indessen war es nicht thunlich, dass ich alle diese Töne bei einer und derselben Membran zur Anwendung brachte.

Da eine gleichmässige Spannung der Membrane um so schwieriger wird, je grösser dieselben sind, verzichtete ich auf Anwendung kreisförmiger Rahmen von mehr als 15 cm Durchmesser und quadratischer Rahmen von mehr als 15 cm Seitenlänge. Der tiefste Ton einer Membran von Pergamentpapier, welche auf meinen grössten Rahmen aufgespannt war, lag gewöhnlich zwischen c_0 und c_1. Bei einer solchen Membran zeichnete ich nur diejenigen Schwingungsfiguren auf, welche durch die Stimmgabeltöne bis c_3 resp. c_4 hervorgebracht wurden, da bei höheren Tönen die Klangfiguren zu sehr complicirt und zu wenig übersichtlich waren. Damit ich keiner tieferen Stimmgabeln bedürfte, wandte ich kleinere Membrane an, um die Schwingungsformen bei Tönen, welche niedriger oder wenig höher als der Grundton der Membran waren, zu beobachten. Ich habe es überflüssig gefunden, die Membrane aus anderem Material als Papier herzustellen, da die verschiedenen Sorten Pergament-, Hanf-, Schreib-, Druck- und Zeichen-Papier am leichtesten zu erhalten sind

und einige dieser Sorten in assortirten Handlungen in verschiedener Dicke gekauft werden können.

Beim Aufkleben der Membrane beachtete ich natürlich die Vorsichtsmassregeln, welche Bourget und Bernard angeben. Das Papier wurde in Wasser getaucht und nach Entfernung der überflüssigen Feuchtigkeit auf den hölzernen Rahmen gelegt, welcher vorher mit nicht zu starkem Tischlerleim bestrichen war. Dann suchte ich mit der Hand das Papier möglichst gleichmässig schwach zu spannen. Die Zusammenziehung der Membran beim Trocknen vergrössert die Spannung noch bedeutend, so dass häufig das Papier zerreisst, wenn das Trocknen zu schnell vor sich geht, oder dass es sich von dem Rahmen loslöst, wenn der Leim zu dünnflüssig ist. Indessen nachdem ich einige Uebung im Aufspannen erlangt hatte, hatte ich nicht oft mehr mit dem gänzlichen Misslingen der Membrane zu kämpfen.

Wenn eine gut gespannte Membran der Untersuchung unterworfen werden sollte, musste ich natürlich von Zeit zu Zeit ihren tiefsten Eigenton bestimmen. Durch das Singen von Tonleitern konnte ich leicht den tiefsten Ton, den ich zu singen im Stande war, finden, auf welchen die Membran kräftig resonirte. Dann hatte ich nur noch zu bestimmen, ob dieser Ton der tiefste oder ein anderer Eigenton der Membran war. Dazu gab die von mir eingeschlagene Untersuchungsmethode die ausreichenden Mittel an die Hand.

Man habe gefunden, dass c_1 der tiefste Ton ist, welchen man singen kann und mit welchem die an's Ohr gehaltene kreisförmige Membran kräftig mittönt. Man verbinde die Membran mit einer Stimmgabel c_1 in der oben angegebenen Weise und bestreue sie mit etwas Sand und Lycopodium. Wird dann beim Tönen der Stimmgabel aller Sand nach dem Rande, alles Lycopodium nach dem Mittelpunkte der mitschwingenden Membran hingeweht, so ist c_1 der Grundton der Membran. Bildet sich dagegen eine Knotenlinie im Innern der Membran, so befestige man den Faden in der Nähe des Randes und bringe die Stimmgabel wieder zum Tönen: legt sich dann der Sand über einen Durchmesser der Membran, so ist c_1 der zweite Eigenton der Membran, dessen Schwingungszahl nach der Theorie der freien Membranschwingungen 1,594 mal so gross ist als diejenige des Grundtones.

Bei quadratischen Membranen ist eine solche Untersuchung meist überflüssig, denn diejenigen Schwingungsfiguren, welche bei der freischwingenden Membran erhalten werden und bei denen keine Knotenlinie durch den Mittelpunkt hindurchgeht, werden auch erhalten, wenn man die Membran durch eine Stimmgabel von der betreffenden Tonhöhe in Schwingung versetzt. Aus der Tonhöhe eines beliebigen Eigentones lässt sich aber leicht diejenige des Grundtones berechnen, wenn die dem ersteren zugehörige Schwingungsform bekannt ist. Wenn sich z. B. bei Anwendung der Stimmgabel g_1 im Innern einer quadratischen Membran parallel den Kanten je zwei gerade Knotenlinien bildeten, so zeigte die Theorie der freien Schwingungen, dass die Schwingungszahl, welche dieser Klangfigur entspricht, in Beziehung auf den Grundton der Membran als Einheit gleich 3 war; demnach war c_0 der Grundton der Membran.

Die Schwingungszahl zu der Klangfigur, welche eine andere Stimmgabel, z. B. f_1, erzeugte, berechnete sich dann leicht aus dem Verhältniss von f_1 zu c_0, nämlich zu $\frac{4}{3} . 2 = 2{,}666 \ldots\ldots$

Es mag an dieser Stelle bemerkt werden, dass ich bei der Berechnung der Schwingungszahlen zu den dieser Abhandlung beigefügten Klangfiguren stets den Eigentönen der Membran die theoretisch berechneten Tonhöhen zugeschrieben und diese der Berechnung zu Grunde gelegt habe.

5. Besondere Vorsichtsmassregeln.

Bei jeder Membran, welche gut aufgeklebt und so weit ausgetrocknet war, dass ihre Eigentöne sich während eines Zeitraumes von mindestens einer Stunde nicht mehr erhöhten, wurde nach der Bestimmung des Grundtones zuerst der Mittelpunkt geometrisch bestimmt. Denn es ist eine wesentliche Bedingung, dass der Befestigungspunkt des Fadens bei allen Schwingungsfiguren, welche mit einander verglichen werden sollen, genau an derselben Stelle liege. Bei gewissen Figuren wird freilich durch eine kleine Verschiebung des Erregungspunktes nichts geändert; bei anderen aber hat die kleinste Verschiebung Unsymmetrien im Gefolge.

Ich habe immer besonders darauf geachtet, dass die complicirteren aus einfachen Linien zusammengesetzten Klangfiguren sich regelmässig und schön ausbildeten. War dies nicht der Fall, oder hatte die Symmetrieaxe derjenigen Figuren, welche nur zu einer einzigen geraden Linie symmetrisch waren, eine unveränderliche Lage, so suchte ich zuerst den Befestigungspunkt des Fadens genau in die Mitte der Membran zu bringen, und wenn das nicht half, vernichtete ich die Membran als unregelmässig gespannt und zur Untersuchung ungeeignet. Im Laufe der Untersuchung überzeugte ich mich noch von Zeit zu Zeit, ob die Membran ihre Eigentöne nicht geändert habe.

Von vornherein überzeugt, dass die Savart'schen Gesetze richtig seien, wunderte ich mich, bei meinen ersten Versuchen zu sehen, dass die Membran nur durch diejenigen Töne in lebhafte Schwingungen versetzt wurde, welche mit Eigentönen der Membran übereinstimmten, dass bei anderen Tönen die Knotenlinien undeutlich und verwaschen erschienen und dass ferner alle Schwingungsfiguren bei kreisförmigen Membranen concentrische Kreise waren. Ich hatte den Rahmen der Membran an zwei gleich hohen Tischchen derart befestigt, dass ein Theil der Membran sich über den Platten der Tische befand. Bald erkannte ich, dass die zwischen den Tischen und der Membran befindliche Luftschicht an den Schwingungen theilnahm und die Schwingungsfigur mitbestimmte. Ich erhielt völlige Gewissheit hierüber, als ich die Tischchen so weit auseinander rückte, dass nur noch der Rahmen auf den Kanten derselben auflag, und als ich dann eine andere Membran in verschiedenen Entfernungen unter die zu untersuchende hielt.

Daher sorgte ich später immer dafür, dass die Membran einige Fuss von dem Fussboden des Zimmers entfernt blieb und dass kein Theil derselben sich über den Tischen befand, an welchen sie befestigt war.

Um über die Verwandtschaft der erhaltenen Klangfiguren sicher urtheilen zu können, musste ich natürlicherweise auch prüfen, ob eine schräge Stellung des Fadens zur Membran einen Einfluss auf die Ausbildung derselben ausübe, und ob die Schwingungen des Rahmens dieselben mitbestimmen, so dass eine Aenderung in den Schwingungsformen einträte, je nachdem man den Rahmen so wenig als möglich befestigt oder so stark als möglich an den Tisch anpresst.

Die mittleren Theile der Membran werden, da der Faden gespannt sein muss, ein klein wenig in die Höhe gezogen. Wenn aber die Membran einigermassen stark gespannt ist, hat diese Deformation keinen wesentlichen Einfluss auf die Bildung der Schwingungsfiguren, weder wenn die Richtung des Fadens zur Membran senkrecht ist, noch wenn der Faden gegen die Membran schräggestellt wird.

Eine Aenderung der Schwingungsfiguren durch geringere oder stärkere Befestigung des Rahmens habe ich im Allgemeinen nicht constatirt. Nur in wenigen Fällen konnte ich eine solche Aenderung bemerken; aber ich glaube, dass ich dann jedesmal durch zu starkes Anziehen der Befestigungsschrauben den Rahmen etwas verbogen hatte.

Die stark hygroskopische Papiermembran darf während der Untersuchung nicht mit der Hand berührt werden; noch weniger darf man ihr mit dem Gesichte zu nahe kommen, da sie sofort durch die Aufnahme der im Athem enthaltenen Wasserdämpfe verändert wird.

Um sich von der Empfindlichkeit einer Membran gegen Wasserdämpfe zu überzeugen, halte man sie über eine Stimmgabel, mit welcher sie stark mittönt. Dann befestige man ein kleines Wachsklümpchen an der Stimmgabel; nachdem hierdurch der Ton der Gabel erniedrigt worden ist, resonirt die Membran nicht mehr so stark als vorhin, und aufgestreute Sandkörner werden nicht mehr so lebhaft bewegt. Nun hauche man schwach gegen die Membran; ihre Tonhöhe sinkt, da sie Wasserdämpfe aufnimmt; dabei resonirt sie stärker und stärker, und nachdem die Intensität der Resonanz ein Maximum erreicht hat, nimmt sie wieder ab. Hierauf entferne man sich mit dem Gesichte von der Membran; die aufgenommenen Wasserdämpfe verdunsten wieder, und der Eigenton der Membran nähert sich wieder dem Ton der Stimmgabel. Dabei bewegt sich der Sand immer lebhafter, bis die Resonanz ihre grösste Intensität erreicht hat, und endlich nimmt die Stärke der Schwingung wieder ab, indem allmählich der anfängliche Zustand der Membran wieder hergestellt wird.

Man kann übrigens die Membrane gegen den Einfluss der Feuchtigkeit schützen, indem man sie mit trocknenden Oelen oder Harzen imprägnirt. Als ein vortreffliches Schutzmittel gegen Feuchtigkeit erprobte sich das Bestreichen

der Membran mit einer heissen Lösung von etwas Wachs in Terpentinöl. Reines Terpentinöl ist nicht gut anwendbar, da dasselbe zu langsam völlig verdunstet und die Membran zu lange klebrig bleibt.

6. Discussion der Schwingungsfiguren, welche bei quadratischen Membranen erhalten wurden.

Die Figuren 1—44 der Tafeln I und II repräsentiren eine Anzahl von Schwingungsformen quadratischer Membrane und sind nach den wahrscheinlichsten Werthen der zugehörigen Tonhöhen geordnet. Die unter denselben stehenden Zahlen geben die Schwingungszahlen an, bezogen auf den Grundton der Membran als Einheit.

Die blauen Linien stellen die durch schweren, mit Anilinblau gefärbten Sand gebildeten Knotenlinien dar, während das an den Stellen der grössten Ausschwingung in eigenthümlicher Art aufgehäufte Lycopodium- oder Korkpulver durch rothe Farbe bezeichnet ist. Der Erregungspunkt der Schwingungen lag bei all diesen Figuren in der Mitte der Membran.

Ein Ueberblick über diese mannigfachen Klangfiguren zeigt sofort, dass bei keiner derselben eine Knotenlinie weder durch den Erregungspunkt hindurch, noch nahe an demselben vorbei läuft.

Die Schwingungsfiguren derjenigen Töne, welche tiefer sind als der Grundton der Membran, unterscheiden sich nicht wesentlich von einander. Bei diesen Tönen wird aller Sand nach dem Rande der Membran hingetrieben und alles Lycopodium sammelt sich um den Mittelpunkt. Wir schliessen daraus, dass die Intensität der Membranschwingung in dem Erregungspunkte am grössten ist und nach dem Rande zu abnimmt.

Die Bewegung des Lycopodiums wird immer stärker, je näher der Ton der erregenden Stimmgabel dem Grundton der Membran kommt. Wird der erregende Ton allmählich höher als dieser, so breitet sich das Lycopodium weiter um den Mittelpunkt der Membran aus und bildet schliesslich einen Ring um denselben, welcher sich mehr und mehr erweitert.

Der Erregungspunkt bleibt also nicht ein Punkt der stärksten Aufschwingung. In jedem Falle aber bleibt etwas Lycopodium in der Mitte der Membran liegen, selbst wenn der Mittelpunkt als ein Schwingungsminimum betrachtet werden muss.

Bei der Tonhöhe 1,19 hat der Lycopodiumring schon einen beträchtlichen Durchmesser (siehe Fig. 1) und zeigt an den Stellen, wo er von den Diagonalen der Membran geschnitten wird, stärkere Anhäufungen.

Lässt man die Tonhöhe noch weiter wachsen, so wird die Maximallinie mehr und mehr zu einem rhombischen Viereck verzerrt, dessen Ecken auf den Diagonalen liegen (Fig. 2). Dann wird aus dem Rhombus ein Quadrat, welches sich allmählich erweitert (Fig. 3 und 4).

In Fig. 4 ist eine grössere Menge von Lycopodium um den Mittelpunkt angedeutet. Diese Anhäufung ist jedoch nicht durch Ansammlung des stark bewegten Staubes entstanden, sondern die Bewegung in der Nähe des Erregungspunktes ist so schwach, dass derselbe nicht fortgeschleudert wird, woraus wir schliessen, dass sich eine Knotenlinie um den Mittelpunkt herum bilden will. Diese Knotenlinie erweitert sich mit zunehmender Tonhöhe und Fig. 5 zeigt dieselbe als einen Kreis, dessen Radius etwa $^3/_8$ der Seitenlänge der Membran beträgt und welcher von einer quadratischen Maximallinie eingeschlossen wird.

Bei der Tonhöhe 1,60 ist die Mitte der Membran lebhaft bewegt, der Knotenkreis ist noch ein wenig grösser geworden und wird nur von einer kreisförmigen Maximallinie umschlossen, welche über den Diagonalen der Membran verdickt ist.

Die Tonhöhe 1,581 entspricht dem zweiten Eigentone der Membran. Die Theorie der freien Schwingungen zeigt, dass bei diesem Tone der Schwingungszustand der Membran durch die Gleichung

$$(1.)\ w = \left\{ C \sin. \frac{2\pi x}{a} \sin. \frac{\pi y}{a} + D \sin. \frac{\pi x}{a} \sin. \frac{2\pi y}{a} \right\} . \cos. pt$$

dargestellt wird, worin w die Amplitude des variabelen Punktes der Membran, dessen Coordinaten x, y auf eine Ecke als Anfangspunkt des Coordinaten-

systems bezogen sind, zur Zeit t darstellt, a die Seitenlänge der Membran bedeutet und p die mit 2π multiplicirte Schwingungszahl des Tones ist.

Diese Schwingungsart ist einigermassen willkürlich wegen der Unbestimmtheit der constanten Grössen C und D. Für $D = o$ vereinfacht sich obige Gleichung zu

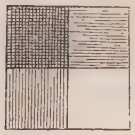
$$w_1 = C \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \sin. \frac{\pi y}{a} \cdot \cos. pt$$

Diese Gleichung entspricht einer Schwingung mit einer geraden Knotenlinie im Innern der Membran $x = \frac{1}{2} a$. Auf ähnliche Weise erhalten wir, indem wir $C = o$ setzen, eine Knotenlinie $y = \frac{1}{2} a$ parallel dem anderen Seitenpaar. Es lässt sich nun zeigen, dass bei allen Schwingungsformen, welche durch die Gleichung (1) dargestellt werden, die einzige Knotenlinie im Innern der Membran durch den Mittelpunkt derselben $x = \frac{1}{2} a$, $y = \frac{1}{2} a$ hindurchgeht. Denn wenn weder C noch D verschwindet, so erhält man die Schwingungsform, indem man die Fundamentalschwingungen

$$w_1 = C \sin. \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin. \frac{\pi y}{a} \cdot \cos. pt \text{ und}$$

$$w_2 = D \sin. \frac{\pi x}{a} \sin. \frac{2\pi y}{a} \cdot \cos. pt$$

mit entsprechenden oder entgegengesetzten Phasen zusammensetzt. Dann ist klar, dass bei übereinstimmenden Phasen in dem unschattirten und in dem doppelt



schattirten Theile der nebenstehenden Figur die Richtung der Verschiebungen dieselben sind und dass daher in diesen Theilen kein Theil der Knotenlinie zu finden ist. Welches auch das Verhältniss der Amplituden sein mag, die Knotenlinie kann nur durch die einfach schattirten Theile hindurchgehen. Wenn andererseits die Phasen der Bewegung entgegengesetzt sind, so wird die Knotenlinie ausschliesslich durch den doppelt schattirten und durch den unschattirten Theil laufen. Es ist also möglich, dass die eine Diagonale der Membran Knotenlinie wird. Die Gleichung (1) stellt diese Schwingungsform dar, wenn entweder $C = D$ oder $C = -D$ ist. Für andere Beziehungen zwischen C und D ist die innere Knotenlinie gekrümmt. Da sie aber, wie nach dem Vorhergehenden erhellt, stets durch den Mittelpunkt der Membran hindurchgeht, so folgt, dass die

Schwingungsform, welche die Membran bei der nach unserer Methode erzwungenen Schwingung 1,581 zeigt und welche der Fig. 6 unserer Taf. I ähnlich ist, bei den freien Membranschwingungen nicht erhalten werden kann und dass also diese Schwingungsform nicht durch obige Gleichung (1) darstellbar ist.

Die Schwingungsfiguren, welche die freischwingende Membran zeigt, können indessen leicht durch Verschiebung des Erregungspunktes erhalten werden. Befestigt man den Faden in einem Punkte b der einen Diagonale, so wird die andere Diagonale Knotenlinie (siehe Fig. 45); liegt dagegen der Befestigungspunkt des Fadens auf der Parallelen zu einem Seitenpaar, welche durch den Mittelpunkt der Membran geht, so erhält man die Parallele zu dem anderen Seitenpaar als Knotenlinie. Bei anderen Lagen des Erregungspunktes zeigen sich gekrümmte, durch den Mittelpunkt laufende Knotenlinien.

Zwischen den Figg. 6, 7, 8, 9, welchen die Tonhöhen 1,60, 1,70, 1,80, 1,92 entsprechen, ist der continuirliche Uebergang deutlich sichtbar. Die Knotenlinie sowohl als die Maximallinie verzerrt sich mehr und mehr in der Richtung der einen Diagonale. Wird der erregende Ton die Octave des tiefsten Eigentones der Membran, so findet eine eigenthümliche Deformation der Knotenlinie statt, und die Klangfigur ist nicht leicht klar zu erhalten. Die Knotenlinie der Fig. 9 zerreisst und es scheint, als ob sich bei irgend einer Tonhöhe zwischen 1,92 und 2,04 zwei zu der grossen Axe der Knotenlinie in Fig. 9 parallele Geraden als Knotenlinien bilden.

Dieser eigenthümliche Uebergang findet statt, während der erregende Ton die Tonhöhe 2,00 des dritten Eigentones der Membran passirt. Da der einzige diesem Tone entsprechende Schwingungstypus durch die Gleichung

$$(2.)\quad w = C \,.\, \sin.\, \frac{2\,\pi\,x}{a}\, \sin.\, \frac{2\,\pi\,y}{a}\,.\,\cos.\,pt$$

dargestellt wird, der zufolge sich die durch den Mittelpunkt der Membran gehenden Parallelen zu den Seitenlinien $x = \frac{1}{2}\,a$ und $y = \frac{1}{2}\,a$ als die einzig möglichen Knotenlinien ergeben, so haben wir wiederum einen Fall, in welchem die Schwingungsform der erzwungenen Schwingung mit derjenigen der freien Schwingung bei gleicher Tonhöhe nicht übereinstimmt.

Wächst die Tonhöhe der erzwungenen Schwingung über 2,00 hinaus, so bildet sich scharf und klar die Figur 10, in welcher die Knotenlinie eine Hyperbel zu sein scheint, deren erste Axe die eine Diagonale der Membran ist; die andere Diagonale wird eine Linie stärkster Ausschwingung; ebenso findet eine starke Anhäufung von Lycopodium in der Mitte zwischen den Ecken der Membran und den Scheiteln der Hyperbeläste statt.

Bei weiterer Steigerung der Tonhöhe bilden sich wieder keine genügend scharfen Klangfiguren. Es scheint so, als ob sich eine Klangfigur bildete, wie man sie erhält, wenn man die Fig. 10 um 90° um den Mittelpunkt dreht und die so erhaltene Figur auf die ursprüngliche Fig. 10 auflegt.

Steigert man die Tonhöhe noch mehr, so bilden sich deutlich ähnliche Figuren, wie die elfte, welcher die Schwingungszahl 2,12 entspricht. Bei diesen Figuren sind die vier stärksten Lycopodium-Anhäufungen, welche Fig. 10 zeigt, zu einem Quadrat verbunden, und das Lycopodium in der Mitte der Membran wird lebhaft bewegt.

Der Uebergang zwischen den Figg. 11 bis 23 bedarf kaum einer Erläuterung. Fig. 13, welcher die Schwingungszahl 2,24 zugehört, wird auch bei der frei tönenden Membran erhalten. Der vierte Eigenton der Membran hat die Tonhöhe $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots.$; denselben entsprechen die Schwingungsformen, welche durch die Gleichung:

$$(3.)\quad w = \left\{ C \sin. \frac{3\,\pi\,x}{a} \sin. \frac{x\,y}{a} + D \sin. \frac{\pi\,x}{a} \sin. \frac{3\,\pi\,y}{a} \right\} \cos. pt$$

dargestellt werden. Die Fig. 13 wird erhalten, wenn $D = 0$ ist, so dass also diese Schwingungsfigur durch die Gleichung

$$w = C \sin. \frac{3\,\pi\,x}{a} \sin. \frac{\pi\,y}{a} \cos. pt$$

repräsentirt wird.

Wir werden im Verlauf unserer Erörterung erkennen, dass die Klangfiguren derjenigen erzwungenen Schwingungen, welche mit Eigenschwingungen der Membran gleiche Tonhöhe haben, jedesmal einem fundamentalen Schwingungstypus der freischwingenden Membran entsprechen, wenn bei einem solchen der Mittelpunkt der Membran ein Schwingungsmaximum sein kann, — dass aber

die Schwingungsform der erzwungenen Schwingung nicht unter den Schwingungstypen der freischwingenden Membran enthalten ist, wenn sich der Mittelpunkt als ein Knotenpunkt der letzteren charakterisirt.

So stimmt die erzwungene Schwingung Fig. 23, deren Tonhöhe 3,00 ist, mit dem einzigen Schwingungstypus des siebenten Eigentones der Membran überein, welcher durch die Gleichung

$$(4.)\quad w = C \sin. \frac{3\,\pi\,x}{a} \sin. \frac{3\,\pi\,y}{a} . \cos. pt$$

dargestellt wird.

Dagegen kann sich unter den Schwingungstypen des fünften Eigentones, dessen Schwingungszahl gleich $\sqrt{\frac{13}{2}} = 2{,}550\ldots$ ist, keiner finden, welche unseren Figg. 16 und 17 ähnlich ist. Weiter zeigt sich kein Schwingungstypus des sechsten Eigentones, dessen Tonhöhe gleich $\sqrt{\frac{17}{2}} = 2{,}915\ldots$ ist, unter den erzwungenen Schwingungsfiguren von nahezu gleicher Tonhöhe (cf. Fig. 21 und 22).

Man beachte, dass die Tonhöhen

3,162.., 3,536..., 3,606..., 3,808.., 4,000, 4,123..

etc. Eigentönen der Membran entsprechen und überschaue nun sämmtliche Klangfiguren der Tafeln I und II, welche mit Eigentönen der Membran nahezu gleiche Schwingungszahlen haben.

Bei den Uebergängen von Fig. 9 zu 10, von Fig. 24 zu 25, von Fig. 34 zu 35 werden die Schwingungstypen total verändert, so dass ein Sprung von einer Klangfigur zur anderen stattzufinden scheint.

Dagegen zeigt der Uebergang von Fig. 5 zu 6, von Fig. 16 zu 17, von Fig. 29 zu 30, dass das Passiren anderer Eigentöne, bei welchen der Mittelpunkt der Membran ein Knotenpunkt sein muss, gar keinen bemerkbaren Einfluss auf die Bildung der Klangfiguren hat.

Der Uebergang zwischen den Formen der erzwungenen Schwingungen ist stets ein allmählicher, wenn der erregende Ton mit einem Eigenton der Membran übereinstimmt, welcher ein Schwingungsmaximum im Mittelpunkte verlangt, wie die Figg. 12, 13 und 14; 22, 23 und 24; 30, 31 und 32; 38 und 39 zeigen.

Die Klangfiguren der erzwungenen Schwingungen werden um so complicirter und gehen um so schneller in einander über, je höher die Schwingungszahl des erregenden Stimmgabeltones im Vergleich zum Grundton der Membran wird.

Die Figg. 49, 50 und 51 stellen Schwingungsformen dar, welche sehr hohen Tönen entsprechen.

Um zu zeigen, wie die verschiedenen Klangfiguren, welche sich bei der freischwingenden Membran zeigen, aber bei der Erregung der Membran im Mittelpunkte nicht bilden, hervorgebracht werden können, habe ich die Figg. 45 bis 48 gezeichnet; der Punkt b bei diesen Figuren bezeichnet den Befestigungspunkt des Fadens.

Bourget und Bernard haben bereits darauf hingewiesen, dass in den Ecken der Membran und in den Durchschnittspunkten der inneren Knotenlinien sich stärkere Anhäufungen von Sand zeigen. Ich habe dieselbe Erscheinung auch bei allen erzwungenen Schwingungen bemerkt und sie in den gezeichneten Figuren angedeutet.

7. Bemerkungen zu den Schwingungsformen kreisförmiger Membrane.

Die Beobachtung der erzwungenen Schwingungen fand ich durch mehrere Ursachen schwieriger bei kreisförmigen als bei quadratischen Membranen.

Zuerst glaube ich gefunden zu haben, dass kreisförmige Membrane sich schwieriger gleichförmig aufspannen lassen, als quadratische.

Ferner konnte ich oft die Klangfiguren nicht scharf genug erhalten. Bei einer quadratischen Membran konnte ich eine schlecht ausgebildete Klangfigur dadurch schärfer machen, dass ich die Stimmgabel von Neuem mit dem Violinbogen anstrich; denn es ist klar, dass es einiger Zeit bedarf, bis sich alles aufgestreute Pulver auf die Knoten- und Maximallinien vertheilt hat. Bei kreisförmigen Membranen, und besonders wenn sie gut gespannt erschienen,

drehte sich indessen die Figur oft, und ich erhielt eine ebenso schwach ausgebildete wie vorher, nur in anderer Lage.

Nicht minder war es störend, dass ich nicht so leicht, wie bei quadratischen Membranen, erkennen konnte, ob der Faden ganz genau im Mittelpunkt befestigt war. Deshalb darf ich nicht behaupten, dass die gezeichneten Figg. 52 bis 87 überall genau den Uebergang von einem Schwingungstypus zum anderen darstellen, und ich beschränke mich daher auf wenige Anmerkungen.

Die Normalschwingungstypen der freischwingenden kreisförmigen Membran zeigen Knotenliniensysteme, welche aus concentrischen Kreisen und Durchmessern gebildet sind. Ein Blick auf unsere Figurentafeln III und IV lehrt zuerst die Thatsache, dass bei den erzwungenen Schwingungen die verschiedensten krummlinigen Knotenlinien-Figuren erzeugt werden und dass Durchmesser als Knotenlinien nicht vorkommen.

Innerhalb der beiden ersten Octaven des Grundtones liegen zwei Eigentöne der Membran, bei welchen nur concentrische Kreise als Knotenlinien auftreten; der erste derselben hat die Schwingungszahl 2,296, der zweite 3,600. Bei Ersterem liefert die Theorie der freien Schwingungen einen einzigen Knotenkreis im Innern der Membran, dessen Radius gleich 0,436 des Radius der Membran ist, bei Letzterem zwei Knotenkreise mit den Radien 0,278 und 0,638.

Den ersteren dieser Schwingungstypen habe ich nicht bei meinen Versuchen erhalten; es entsprach zufällig keine der von mir beobachteten erzwungenen Schwingungen genau der Tonhöhe 2,296. Indessen habe ich keinen Grund anzunehmen, dass der Typus der erzwungenen Schwingung bei dieser Tonhöhe nicht derselbe sein kann, wie der Typus des entsprechenden Eigentones (cf. Fig. 58).

Den Schwingungstypus des anderen Eigentones mit der Tonhöhe 3,600 erhielt ich mehrere Male (siehe Fig. 74).

Was die Uebergänge zwischen den Klangfiguren anbetrifft, so gilt für die Schwingungsformen der Töne, welche niedriger oder wenig höher sind als der Grundton der Membran, dasselbe, was im vorigen Kapitel von den entsprechenden Klangfiguren quadratischer Membrane gesagt wurde.

Der Uebergang von einer Schwingungsform zur anderen bleibt ein allmählicher, bis die Höhe des erregenden Stimmgabeltones diejenige des Eigentones 2,296 erreicht. Nachdem diese überschritten ist, tritt ein Zerreissen der geschlossenen Knotenlinie ein. Die Klangfigur ist nicht leicht klar zu erhalten, und es scheint, als ob zwei parallele Sehnen Knotenlinien werden. Dann bildet sich bei der Tonhöhe 2,35 wieder deutlich die Figur 59. Wächst die Tonhöhe noch mehr, so treten wiederum geschlossene Knotenlinien auf, welche aber einen grösseren Flächenraum umschliessen, als diejenigen der vorhergehenden Klangfiguren.

Bei der Tonhöhe 2,52 (Fig. 62) haben wir wieder eine zweiästige Figur, vielleicht eine Hyperbel, als Knotenlinie. Die Hyperbeläste gehen dann immer mehr in gerade Linien über, und es scheint, als ob sich in der Nähe der Tonhöhe 2,60 wieder zwei parallele Sehnen als Knotenlinien bilden wollen. Die Figur dreht sich aber bei dieser Tonhöhe sehr leicht um den Mittelpunkt der Membran und ist in Folge dessen nicht leicht klar zu erhalten.

Merkwürdiger Weise zeigt sich, dass einige der geschlossenen Knotenlinien-Figuren, welche nach dem Ueberschreiten der Tonhöhe 2,60 auftreten, kleinere Flächenräume einschliessen, als vorhergehende; indessen erkennt man das Fortschreiten von einer niederen Schwingungszahl zu einer höheren bei den Figg. 64, 65 und 66 an dem Auftreten einer neuen Maximallinie innerhalb der Knotenlinie.

Der Uebergang zwischen den folgenden Figuren bis zur Fig. 74 war wegen der Beweglichkeit derselben nicht leicht zu beobachten. Vielleicht müsste in Fig. 69 der innere Knotenkreis etwas kleiner gezeichnet sein; in Fig. 70 muss jedenfalls auch die Bildung einer kleinen Knotenlinie um den Mittelpunkt angenommen werden; ich habe mich indessen bemüht, die erhaltenen Figuren möglichst getreu wiederzugeben und Nichts zu zeichnen, was ich nicht gesehen habe.

Bei Tönen, welche höher sind als der Eigenton 3,60, werden die Klangfiguren stabiler und sind in Folge dessen schärfer zu erhalten. Der continuirliche Uebergang von Fig. 76 bis zur Fig. 81 ist in die Augen springend und bedarf keiner Erörterung. Bei der Tonhöhe 4,27 tritt wiederum ein Uebersprungen von einem Schwingungstypus zu einem anderen ein.

Man beachte die Verwandtschaft zwischen den Figg. 82 und 85 und den Figg. 59 und 62. Das Verhältniss der Schwingungszahlen 4,24 : 4,50 ist 1 : 1,06, dasjenige der Schwingungszahlen 2,35 : 2,52 ist 1 : 1,07. Wenn man bedenkt, dass eine kleine Aenderung der Tonhöhe nur eine kleine Aenderung der Schwingungsfiguren herbeiführt, so wird man vermuthen können, dass zwischen den Tonhöhen zweier Klangfiguren, welche den Figg. 59 und 62 ähnlich sind, dasselbe Verhältniss besteht, wie zwischen den Tonhöhen zweier verwandter Figuren, welche sich von den Figg. 82 und 85 nur wenig unterscheiden.

Ebenso möchte ich darauf aufmerksam machen, dass sich die Schwingungszahlen der drei in anderer Weise verwandten Klangfiguren 62, 69 und 77 nahezu wie 4 : 5 : 6 verhalten.

Es wurde oben bemerkt, dass in der Nähe der Tonhöhe 2,30 zwei Parallelsehnen als Knotenlinien auftreten; bei der Octave dieses Tones bilden sich vier parallele Knotenlinien (siehe Fig. 86).

Bei einigen Figuren, welche Bourget „bizarr" genannt haben würde, findet eine überraschende Verwandtschaft mit den eben so auffallenden Figuren, welche eine quadratische Membran bei derselben Tonhöhe liefert, statt, wie man sich durch Vergleichung der Figg. 75 und 32, 79 und 37, 83 und 40 überzeugen wird.

Die Figg. 88, 89 und 90 stellen drei Schwingungstypen dar, welche Eigentönen der Membran entsprechen und welche durch Uebertragung einer Stimmgabelschwingung bei seitlicher Befestigung des Fadens in derselben Gestalt erhalten wurden, wie sie sich der Theorie nach bei der freischwingenden Membran zeigen müssen; der Punkt b bezeichnet den Befestigungspunkt des Fadens.

Zu den Figg. 91 bis 102, welche bei einer rechteckigen Membran, deren Seiten sich ungefähr wie 1 : 5 verhielten, erhalten wurden, ist wenig zu bemerken.

Der Unterschied zwischen den Schwingungszahlen zweier aufeinander folgender Figuren beträgt einen halben bis einen ganzen Ton. Man erkennt auch bei diesen Schwingungsformen den continuirlichen Uebergang; auffallend

ist nur, dass bei der schmalen rechteckigen Membran sich auch Knotenlinien bilden, welche durch den Erregungspunkt hindurchgehen. Indessen sind diese Knotenlinien immer undeutlich gebildet. Der Fig. 103 entspricht ein Ton, welcher die Octave des zur Fig. 101 gehörenden Tones ist.

Auch der Uebergang zwischen der Reihe der Klangfiguren einer rechtwinkelig dreieckigen Membran (Fig. 104 bis 112) bedarf keiner weiteren Erläuterung. Ich habe diese Klangfiguren einer rechteckigen und einer dreieckigen Membran nur deshalb gezeichnet, um die Behauptung zu stützen, dass eine Membran von beliebiger Gestalt sich den Savart'schen Gesetzen entsprechend verhält.

8. Ergebnisse der Untersuchung.

Damit ein gegebener elastischer Körper gezwungen werde, eine Schwingungsbewegung von beliebiger Periode zu vollführen, genügt es nicht, dass ein zweiter Körper mit demselben verbunden wird, welcher entweder infolge einer äusseren nicht periodischen Einwirkung oder infolge eines äusseren periodischen Zwanges in Schwingungen mit dieser Periode versetzt ist. Die Masse und die Intensität der Bewegung des erregenden Körpers muss vor allen Dingen gross genug sein, wenn die Einwirkung auf den gegebenen Körper den erwünschten Erfolg haben soll.

Man mag daher wohl an der Ausführbarkeit der Aufgabe, einen gegebenen Körper mit vorgeschriebener Geschwindigkeit schwingen zu lassen, zweifeln: Dagegen muss man stets die beliebige obligatorische Schwingung als möglich denken, da man die Stärke der Einwirkung auf den gegebenen Körper immer grösser werden lassen kann.

Bourget und Bernard hielten ihre Membrane über eine tönende offene Pfeife und liessen dieselben durch die Schwingungen der Luft über der Pfeife erschüttern. Sie konnten natürlich nicht a priori darüber entscheiden, ob die periodische Bewegung der Luft hinreichend kräftig sei, die Membran mit der Tonhöhe der Pfeife in Schwingung zu versetzen. Ihre Beobachtungen

zeigten, dass dies nicht der Fall war; in keinem Falle aber durften ihre Resultate als eine Widerlegung der Savart'schen Gesetze gedeutet werden.

Die vorliegende Abhandlung zeigt dagegen, auf welche Weise es möglich ist, eine Membran mit beliebiger Periode tönen zu lassen; in meiner Dissertation habe ich bereits angegeben, wie sich die Luftsäule in einer geschlossenen Röhre in obligatorische Schwingungen versetzen lässt, und ich beabsichtige, demnächst zu zeigen, dass auch Platten und andere Körper sich in erzwungene Schwingungen versetzen lassen.

Für alle Arten von Körpern und für alle Methoden der Schwingungserregung gelten die Savart'schen Gesetze, deren Gültigkeit für Membrane die vorliegende Abhandlung nachweist. Diese Gesetze der erzwungenen Schwingungen lassen sich, wie ich glaube, am schärfsten in folgender Weise fassen:

1. Es ist möglich, einen beliebigen elastischen Körper durch eine äussere periodische Einwirkung mit beliebiger Tonhöhe in Schwingung zu versetzen, wenn nur die äussere Einwirkung in geeigneter Weise erfolgt und die genügende Stärke besitzt.
2. Der Typus der erzwungenen Schwingung eines gegebenen Körpers ist bestimmt durch das Intervall zwischen dem tiefsten Eigenton und der erzwungenen Schwingung sowie durch die Lage der Erregungsstelle.
3. Der Typus der erzwungenen Schwingung eines gegebenen Körpers ist eine continuirliche Function der Periode der äusseren Einwirkung, dergestalt, dass eine sehr kleine Aenderung in der Periode der erregenden Schwingung nur eine sehr kleine Aenderung in dem Typus der erzwungenen Schwingung zur Folge hat.
4. Eine allmähliche Aenderung in der Beschaffenheit (Gestalt, Dichte, Spannung etc.) eines Körpers, welcher durch eine sich gleichbleibende äussere Einwirkung in erzwungene Schwingungen versetzt wird, hat eine allmähliche Aenderung des Schwingungstypus zur Folge.

Das erste Gesetz definirt nur den Begriff der erzwungenen Schwingung.

Das zweite wird durch allgemeine Betrachtungen als nothwendig gefordert und durch die vorliegenden Beobachtungen bestätigt. Dasselbe gilt von dem dritten Gesetz. Die Thatsache, dass bei den Uebergängen von einem Schwingungstypus der Membran zu einem anderen eine Knotenlinienfigur in eine wesentlich verschiedene überspringen kann, spricht nicht gegen die Allgemeingültigkeit dieses Gesetzes, da wir Grund haben anzunehmen, dass bei solchen Uebergängen eine vermittelnde Figur auftritt, welche sich gewissermassen in einem labilen Gleichgewichtszustande befindet.

Das vierte Gesetz ist eine Folge der beiden vorhergehenden: denn aus der allgemeinen Theorie der freien Schwingungen folgt, dass eine sehr kleine Aenderung in der Beschaffenheit eines Körpers eine sehr kleine Erhöhung oder Vertiefung seiner Eigentöne zur Folge hat. Eine sehr kleine Aenderung in der Beschaffenheit des Körpers bei gleichbleibender äusserer Einwirkung hat daher denselben Erfolg, wie eine entsprechende Aenderung der Periode der erregenden Schwingung bei ungeändertem Zustande der Membran. Dieser Erfolg ist aber, nach dem dritten Gesetze, eine sehr kleine Aenderung des Schwingungstypus.

Es war natürlicherweise mein lebhafter Wunsch, durch mathematische Behandlung der erzwungenen Membranschwingungen der vorliegenden Abhandlung die theoretische Grundlage zu geben. Indessen hatten alle meine Bemühungen bis jetzt nicht den geringsten Erfolg. Es liegt die Aufgabe vor, die Amplitude w eines beliebigen Punktes der Membran als eine Function seiner Lage, der Zeit t und der Periode T der erregenden Schwingung zu bestimmen, so dass die Function w der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

genügt, für solche Werthe von x und y, welche die Gleichung der Grenzcurve der Membran befriedigen, zu Null wird und für $x = 0$, $y = 0$ eine einfache harmonische Schwingung darstellt, also die Form

$$w = \frac{a}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

annimmt. Ob die gegenwärtig zu Gebote stehenden mathematischen Hülfsmittel gestatten, das Problem der erzwungenen Schwingungen für quadratische oder kreisförmige Membrane zu lösen und die mannigfachen Schwingungsformen, über welche die beigefügten Figurentafeln einen Ueberblick geben sollen, in einen einzigen mathematischen Ausdruck zusammenzufassen — das ist eine Frage, welche zu erörtern ich mir nicht getraue.